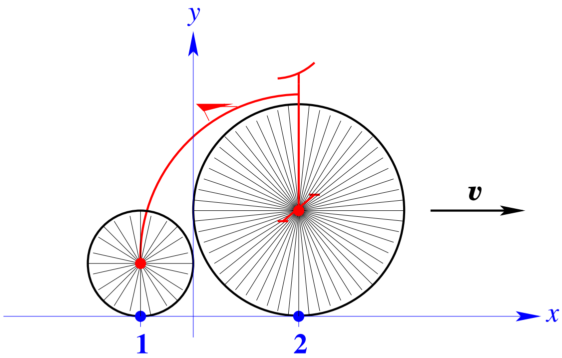
BAHNKURVEN

In diesen Übungen sollen Sie Bahnkurven in einfachen physikalischen Problemen berechnen und ihre Eigenschaften studieren.

[H10] *Vélocipèd* **[$1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Auf einem altmodischen Fahrrad (Rad-Radien R und $2R$) fährt jemand mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ die x-Achse entlang. Die Markierungen **1** und **2** auf den Reifen berühren zur Zeit $t = 0$ gerade gleichzeitig den Boden, und zwar bei

$$\vec{r}_2(0) \doteq \begin{pmatrix} 2R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_1(0) \doteq \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Beantworten Sie nun folgende Fragen zu diesem seltsamen Gefährt:

(a) Welche Winkelgeschwindigkeiten $\omega_2 := \omega$ und $\omega_1 = f(\omega)$ haben die Räder?

(b) Was sind die Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, 2$, der markierten Punkte, und was ist ihre Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{12}(t) := \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{12}}{\mathrm{d}t}$? Hierbei ist $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

(c) Zu welcher Zeit t_1 haben **1** und **2** erstmals wieder die gleiche Höhe und wo (an welchen Orten) $\vec{r}_i(t_1)$, $i = 1, 2$, befinden sie sich dann?

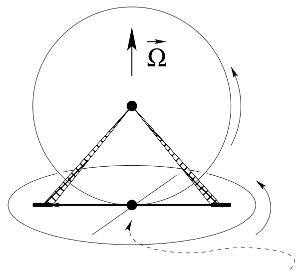
(d) Zu welcher Zeit t_2 und wo wird der Betrag der Relativgeschwindigkeit am größten? Bestimmen Sie hier t_2 durch genügende Vereinfachung von v_{12}^2.

(e) Zu welcher Zeit t_3 und wo haben **1** und **2** die gleiche Höhenzunahme?

(f) Skizzieren Sie die Lage der Markierungen bei t_1, t_2 und t_3. Entsprechen die Resultate der Intuition?

[H11] *Überlagerte Kreisbewegung* **[$2+1+1+2+2^* = 6+2^*$ Punkte]**

Auf dem Schützenfest wird folgende Attraktion geplant: Ein Riesenrad mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω wird auf ein Karussell montiert, das mit Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Der Fahrgast in einer Gondel des Riesenrades folgt einer Raumkurve $\vec{r}(t) = R\vec{e}_3 + R\Big(\sin\omega t\, \vec{f}(t) - \cos\omega t\, \vec{e}_3\Big)$. Hierbei legen $\vec{e}_3$ und $\vec{f} \doteq \begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ \sin\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$ die momentane Riesenrad-Ebene fest. Die nebenstehende Skizze verdeutliche ein wenig den Aufbau.



Startposition

(a) Bilden Sie $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ und $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$. Berechnen Sie daraus die Betragsquadrate v^2 der Geschwindigkeit und a^2 der Beschleunigung.

(b) Vereinfachen Sie die Betragsquadrate aus (a) so, dass Sie den Ausdrücken direkt ansehen können, zu welchem (frühesten) Zeitpunkt und wo (Ortsvektor!) die maximale Geschwindigkeit erreicht wird. Wie groß ist sie? Ist das Resultat plausibel?

(c) Wo und unter welchen Umständen ist die größte Beschleunigung zu ertragen? *Hinweis*: Hier ist eine Fallunterscheidung sinnvoll.

(d) Prüfen Sie nach, ob $\vec{v}(t) = (\vec{\omega}(t) + \vec{\Omega}(t)) \times (\vec{r}(t) - \vec{r}_0)$, wobei für $\vec{r}_0$ ein Punkt zu wählen ist, der auf *beiden* Drehachsen liegt.

(e*) *Zusatzaufgabe*: Berechnen Sie für den oberen Scheitelpunkt der Bahn Krümmung $\kappa = |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|/v^3$ und Torsion $\tau = \dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})/|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2$ und vergleichen Sie mit R^{-1}.

[C1] *Parametrische Kurven* **[3 Punkte]**

In Präsenzübung [P10] haben Sie die Bahnkurve eines Lichtstrahls bestimmt, der von einer rotierenden Lichtquelle ausgehend durch eine gradlinig bewegte Lochblende auf einen festen Schirm traf. Mit den Bezeichnungen aus dieser Aufgabe ergibt sich für die Kurve auf dem Schirm in der yz-Ebene

$$\begin{pmatrix} vt\left(1+\dfrac{1}{1-\frac{r}{a}\cos\omega t}\right) \\ \dfrac{r\sin\omega t}{1-\frac{r}{a}\cos\omega t} \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine parametrische Darstellung der Bahnkurve. Die Funktion `ParametricPlot` ist geeignet, solche Kurven in parametrischer Darstellung zu visualisieren. Stellen Sie die Kurve des Lichtstrahls für Zeiten im Bereich $0 \leq t \leq 100$ dar. Verwenden Sie die Funktion `Manipulate`, um interaktiv Werte für r, a, v und ω einstellen zu können. Wählen Sie für diese Parameter sinnvolle Bereiche. Versuchen Sie sicher zu stellen, dass immer $r < a$ gilt.

Spielregeln für die Computerübungen

Die Bearbeitung der Übungsaufgaben soll allein erfolgen. Der Lösungsweg soll vollständig mit *Mathematica* ausgeführt und in einem "Notebook" dokumentiert werden. Geben Sie einen Ausdruck dieses Notebooks zusammen mit der Hausübung ab. Seien Sie darauf vorbereitet, Ihre Lösung gegebenenfalls vorführen und erläutern zu müssen. Lösungen, die identisch zu anderen oder sonst in eindeutiger Weise einfach Kopien sind, werden nicht gewertet.

Es gibt eine spezielle Sprechstunde zur Aufgabenbetreuung. Diese findet statt:

- Dienstags, 10 bis 12 Uhr im CIP-Raum F411.

Versuchen Sie aber unbedingt, erst selbst eine Lösung zu finden und dafür die sehr umfangreiche Dokumentation zu *Mathematica* zu konsultieren. Diese ist auch im Internet verfügbar, ist aber auf englisch. Bedenken Sie, dass Sie als Physiker aber ohnehin englische Fachliteratur lesen können müssen (und ja, auch als zukünftiger Lehrer!). Eine Google-Suche mit den Stichworten "Name des Kommandos" und "Mathematica" führt Sie in den ersten Treffern zu den Seiten von Wolfram Research mit Erläuterungen des Kommandos, Beispielen und Tutorials.

Wenn Sie von dem Betreuungsangebot Gebrauch machen, ist es vorteilhaft, mit klar formulierten und gezielten Fragen zu kommen.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!